DM n°1 : Logique

Exercice 1.

Exercice 2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier !

1) $P: \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n^3 - n$ est pair

2) $Q: \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| \leq \eta \implies x^2 \leq 1$

3) $R: \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 $\implies n$ est pair

Exercice 3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) - f(y)$$

Exercice 4 (*Sera corrigé en classe, ne pas répondre sur la copie !*)**.** On vous présente une “preuve” qui prétend montrer que pour tout $n \geq 1$, étant donné n nombres réels $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$, ces nombres sont en fait tous égaux. La “preuve” est la suivante :

> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
>
> $$P(n) : \quad \text{"quels que soient } u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}, \quad \text{on a } u_1 = u_2 = \ldots = u_n\text{”}$$
>
> Montrons $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.
>
> **Initialisation** : lorsque $n = 1$, alors pour tout $u_1 \in \mathbb{R}$ l'égalité $u_1 = \ldots = u_n$ devient simplement $u_1 = u_1$. $P(1)$ est trivialement vraie.
>
> **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.
> Soit $u_1, \cdots, u_{n+1} \in \mathbb{R}$. Montrons que $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u_{n+1}$.
>
> - D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$.
> - Par ailleurs, si l'on pose
> $$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = u_3, \quad \ldots \quad u'_n = u_{n+1}$$
>   et que l'on applique $P(n)$ aux réels $u'_1, \cdots, u'_n$, on en déduit que $u'_1 = u'_2 = \ldots = u'_n$, c'est-à-dire $u_2 = \ldots = u_n = u_{n+1}$.
>
> En combinant ces deux résultats, on a donc $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u_{n+1}$. D'où $P(n+1)$ est vraie.
> **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le résultat est évidemment faux. Où est l'erreur ?